Аграрен университет – Пловдив, Научни трудове, т. LXI, кн. 1, 2018 г.
Втора студентска научна конференция
Agricultural University – Plovdiv, Scientific Works, vol. LXI, issue 1, 2018
Second Students' Scientific Session

DOI: 10.22620/sciworks.2018.01.007

ПРИЛОЖЕНИЕ НА МАТРИЧНАТА АЛГЕБРА В ИКОНОМИКАТА
APPLICATION OF THE MATRIX ALGEBRA IN THE ECONOMY

Юлияна Йорданова, Велика Кунева*
Yuliana Yordanova, Velika Kuneva*

Аграрен университет – Пловдив
Agricultural University – Plovdiv

***E-mail: kuneva.1977@abv.bg**

Abstract

The present research aims at the application of basic linear algebra concepts in the field of economics, more specifically – the linear optimization method. Students are stimulated to search the application character of the basic mathematical concepts in order to facilitate their learning of other applied sciences. By means of the matrix equation, a mathematical theory is developed describing the connections between the economic branches.

Keywords: determinant, matrix, the inverse of a matrix, equation by matrix inversion.

ВЪВЕДЕНИЕ

Икономико-математическият модел е основен инструмент за изследване на операциите в икономиката. Наблюдава се икономическият обект и се анализират неговите количествени и качествени особености. Съставя се математически модел на изследвания икономически обект и с помощта на подходящи математически методи се търси решение на модела. То се анализира и при задоволителни резултати се прилага в практиката. За създаването на математически модел е необходимо да има ясна представа за целта на изследваната система и да се разполага с информация за ограниченията върху системата, които определят областта от допустими стойности на управляемите променливи.

Математическият модел е описание на даден обект с математически средства. Моделът отразява само основните, съществените страни и свойствата на обекта (Grozev et al., 1999).

МАТЕРИАЛИ И МЕТОДИ

За да покажем нагледно как би могла да се приложи матричната алгебра в икономиката, първоначално ще припомним някои основни дефиниции.

- **Матрици. Действия с матрици**

Правоъгълна таблица, съставена от $m.n$ на брой числа, разположени в m реда и n стълба, се нарича ***матрица*** с размерност $m \times n$ (или матрица от тип $m \times n$).

Числата в таблицата се наричат ***нейни елементи***. Матриците обикновено се означават с главните латински букви A, B, C и т.н. В общия случай матрицата A с размерност $m \times n$ се записва във вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Нека са дадени матриците $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$.

Под ***произведение на произволно реално число*** k и ***матрицата*** $A = (a_{ij})_{m \times n}$ се разбира матрицата $kA = (ka_{ij})_{m \times n}$.

Под ***произведение*** $C = AB$ ***на матриците*** A и B се разбира матрицата $C = (c_{ij})_{m \times p}$, където

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

С други думи, две матрици се умножават, като всеки ред на първата матрица се умножи последователно с всички стълбове на втората.

- **Детерминанти**

На всяка квадратна матрица $A = (a_{ij})$ от n-ти ред по определено правило се съпоставя едно реално число, което се означава със символа

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и се нарича ***детерминанта от n-ти ред***, съответстваща на квадратната матрица A. Обикновено детерминантите от n-ти ред се бележат със следните означения D, Δ, $\det A$.

Поддетерминанта D_{ij} на елемента a_{ij} $(i, j = \overline{1,n})$ от детерминантата D се нарича детерминантата от $(n–1)$-ви ред, която се получава от D след отстраняване на i-тия ѝ ред и j-тия ѝ стълб.

Адюнгирано количество на елемента a_{ij} от D се нарича числото

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} . D_{ij}; \quad i, j = \overline{1,n}$$

- **Обратна матрица**

Нека A е квадратна матрица. Тя се нарича ***неособена***, ако $\det A \neq 0$, и ***особена***, ако $\det A = 0$.

Казваме, че матрицата A^{-1} е ***обратна*** на квадратната матрица A, ако са изпълнени условията:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E,$$

където E е ***единичната матрица*** от същия ред.

Всяка неособена квадратна матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

има единствена обратна матрица A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

където A_{ij} са адюнгираните количества на елементите a_{ij} на детерминантата на матрицата $A\left(i, j = \overline{1,n}\right)$ (Ivanova et al., 2011).

- **Матрични уравнения**

Уравнение от вида AX = B или XA = B, където A и B са известни матрици, а X – неизвестна матрица, наричаме **матрично уравнение.**

Ако A е неособена квадратна матрица от n-ти ред, а B е матрица с n реда, то матричното уравнение AX = B има единствено решение $X = A^{-1}.B$.

Ако A е неособена квадратна матрица от n-ти ред, а B е матрица с n стълба, то матричното уравнение XA = B има единствено решение $X = B.\,A^{-1}$.

Приложение на действията с матрици в икономиката

Задача 1. Две фирми произвеждат три вида продукти – A, B и C. Количествата от всяка фирма са дадени в таблица 1.

Таблица 1

Фирма/Продукти	A	B	C
Фирма 1	10	15	8
Фирма 2	12	18	10

Продажната цена за 1 t от съответния продукт е: A – 120 лв., B – 170 лв. и C – 110 лв. Да се запише дадената информация в матричен вид и да се пресметне полученият доход от всеки един продукт поотделно.

Решение: Нека A = $\begin{pmatrix} 10 & 15 & 8 \\ 12 & 18 & 10 \\ & & \end{pmatrix}$ е матрицата на добивите, B = $\begin{pmatrix} 120 \\ 170 \\ 110 \end{pmatrix}$ е матрицата на цените. Тогава произведението на матрицата AB изразява получения доход от всяка фирма. Имаме

$$\begin{pmatrix} 10 & 15 & 8 \\ 12 & 18 & 10 \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 120 \\ 170 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.120 + 15.170 + 8.110 \\ 12.120 + 18.170 + 10.110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4630 \\ 5600 \end{pmatrix}$$

Приложение на матричните уравнения в икономиката

От общия курс на матричната алгебра ще разгледаме няколко важни практически задачи с икономическа насоченост. Две от тях имат съществена роля в икономиката – задача за разпределение на ресурсите и задача за съставяне на хранителна дажба.

1) Задача за разпределение на ресурсите с приложение в икономиката

При тази задача става дума за намиране на производствена програма (матрица X), когато са известни разходните норми (мартица A) и наличните количества ресурси (матрица B). При това се изисква задължително пълно потребление на наличните количества ресурси.

Проблемът се свежда до решаване на матричното уравнение от I вид AX = B. За да има смисъл матрицата X, тя трябва да се състои само от неотрицателни елементи.

Задача 2. Фирма произвежда три продукта – A, B и C, на базата на три ресурса и в таблица 2 са приведени разходните норми, наличните количества ресурси и очакваната печалба от единица продукция.

Таблица 2

Използвани ресурси	Продукция			Осигурени количества
	A	B	C	
P1	2	1	1	250
P2	3	1	2	380
P3	2	1	-	220
Печалба	4	3	5	

Решение: Ще намерим производствената програма $X \geq 0$. на фирмата, така че ресурсите да бъдат използвани пълно.

В случая матричното уравнение има вида:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . X = \begin{pmatrix} 250 \\ 380 \\ 220 \end{pmatrix}$$

Матричното уравнение е от вида AX = B и има единствено решение

X = A $^{-1}$ .B.

Пресмятаме стойностите на Da и адюнгираните количества, след което заместваме във формулата за обратна матрица.

$$D_A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 3 + 4 - 2 - 4 - 0 = 1 \neq 0$$

$$A_{11} = (-1)^2 . D_{11} = 1.(-2) = -2$$
$$A_{12} = (-1)^3 . D_{12} = -1.(-4) = 4$$
$$A_{13} = (-1)^4 . D_{13} = 1.1 = 1$$

$$A_{21} = (-1)^3 . D_{21} = -1.(-1) = 1$$
$$A_{22} = (-1)^4 . D_{22} = 1.(-2) = -2$$
$$A_{23} = (-1)^5 . D_{23} = -1.0 = 0$$
$$A_{31} = (-1)^4 . D_{31} = 1.1 = 1$$
$$A_{32} = (-1)^5 . D_{32} = -1.1 = -1$$
$$A_{33} = (-1)^6 . D_{33} = 1.(-1) = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad X = A^{-1} . B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 250 \\ 380 \\ 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Решението X = $\begin{pmatrix} 100 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ означава, че за да се използват пълно осигурените количества ресурси, фирмата трябва да произведе продукти A, B и C съответно в обем 100, 20 и 30. Общият размер на печалбата P ще бъде

P = 100.4 + 20.3 + 30.5 = 400 + 60 + 150 = 610

Още веднъж ще акцентираме върху факта, че ние разглеждаме разпределение на ресурсите, при условие че търсим тяхното пълно потребление в производствения процес. Ние се занимаваме с един частен случай на проблема, когато броят на ресурсите съвпада с броя на продуктите. Това позволява прилагането на матрични уравнения.

2) Задача за съставяне на хранителна дажба

Този проблем е свързан с изхранването на животни (хора). Необходимата информация включва хранителното съдържание на фуражите – матрица А, и необходимите количества хранителни вещества, които трябва да осигурява дажбата – матрица В.

Ако X е матрицата, която описва дажбата, тя е решение на матричното уравнение от вида AX = B. За да има реален смисъл тази матрица, е необходимо нейните елементи да бъдат неотрицателни, т.е. $X \geq 0$.

При така формулирания проблем хранителните вещества се осигуряват на фиксирани равнища.

Задача 3. Животновъдна ферма разполага с три фуража. Изхранването на даден вид животни е съобразено с три хранителни вещества. Хранителното съдържание на 1 kg от фуражите, необходимите количества хранителни вещества, както и цените на фуражите, са поместени в таблица 3.

Таблица 3

Хранителни вещества	Фуражи			Осигурени количества
	Ф1	Ф2	Ф3	
А1	1	2	1	8
А2	1	3	2	10
А3	1	2	2	10
Печалба	4	6	5	

Решение: Ще намерим дажба X, която да осигурява хранителни вещества на посочените фиксирани равнища, и ще пресметнем нейната цена P.

$$D_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$A_{11} = (-1)^2.D_{11} = 1.2 = 2$$
$$A_{12} = (-1)^3.D_{12} = -1.0 = 0$$
$$A_{13} = (-1)^4.D_{13} = 1.(-1) = -1$$

$$A_{21} = (-1)^3.D_{21} = -1.2 = -2$$
$$A_{22} = (-1)^4.D_{22} = 1.1 = 1$$
$$A_{23} = (-1)^5.D_{23} = -1.0 = 0$$
$$A_{31} = (-1)^4.D_{31} = 1.1 = 1$$
$$A_{32} = (-1)^5.D_{32} = -1.1 = -1$$
$$A_{33} = (-1)^6.D_{33} = 1.1 = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Решението за X показва, че търсената дажба включва 6 kg от фураж 1 и 2 kg от фураж 3. След това пресмятаме цената P = 6.4 + 2.5 = 34.

Разглеждаме съставяне на дажба при точно фиксирани равнища на хранителните вещества в нея. Това е частен случай на проблема, когато броят на фуражите съвпада с броя на хранителните вещества. Двете условия позволяват използването на матрично уравнение.

ИЗВОДИ

Чрез илюстративен пример се установява, че математическите задачи не са абстрактни игри, а здраво свързани с практиката, т.е. те са породени от нея.

REFERENCES

Ivanova, I., M. Milanova, V. Kuneva, 2011. Handbook for applied mathematics, Academic publishing house of Agricultural University.

Grozev, S., A. Avramov, 1999. Mathematical modeling with application in economics and business, ABAGAR.

http://bg.wikipedia.org/wiki/Линейна_алгебра

http://www.matematika.bg/visha-matematika/lineina-algebra-matrici/index.html